Momenty setrvačnosti průřezů
- použití určitých integrálů v Technické mechanice

Dana Říhová, Pavla Kotásková

Mendelu Brno

Perspektivy krajinného managementu - inovace krajinářských disciplín

reg.č. CZ.1.07/2.2.00/15.0080

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

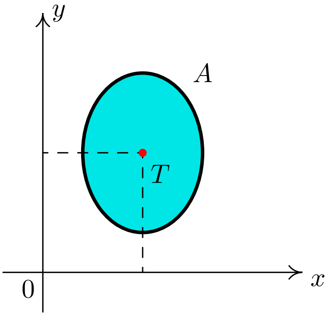
Obsah

Jakob Steiner
švýcarský matematik - geometr

Momenty setrvačnosti průřezů

Momenty setrvačnosti průřezu s plochou A k ose x a k ose y

$$\boxed{I_x = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A, \quad I_y = \int_A x^2 \, \mathrm{d}A}$$



Momenty setrvačnosti k osám procházejícím těžištěm se nazývají centrální.

Souvislost momentů setrvačnosti k rovnoběžným osám

Steinerova věta

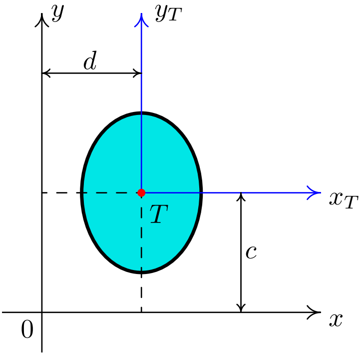
Moment setrvačnosti průřezu k ose, která neprochází těžištěm, se rovná momentu setrvačnosti průřezu k těžišťové ose, která je s ní rovnoběžná, zvětšenému o součin plochy průřezu a čtverce vzdálenosti obou os

$$I_x = I_{x_T} + c^2 A$$

$$I_y = I_{y_T} + d^2 A$$

Steinerova věta představuje vztah mezi momenty setrvačnosti k těžišťovým osám a k osám, které jsou s nimi rovnoběžné.

Steinerova věta



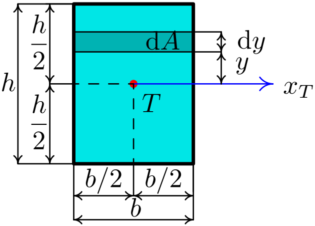
Po úpravě lze Steinerovu větu použít ve tvaru

$$I_{x_T} = I_x - c^2 A$$

$$I_{y_T} = I_y - d^2 A$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Obdélník - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám



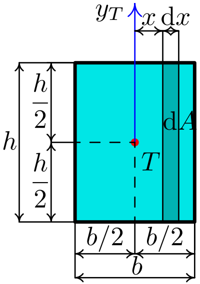
$\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}y$
diferenciál plochy proužku

integrační meze y od $-\frac{h}{2}$ po $\frac{h}{2}$

$$I_{x_T} = \int_A y^2\,\mathrm{d}A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} by^2\,\mathrm{d}y = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\,\mathrm{d}y = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right] = \frac{b}{3}\,\frac{2h^3}{8} = \frac{1}{12}bh^3$$

Obdélník - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám



$\mathrm{d}A = h\,\mathrm{d}x$

diferenciál plochy proužku

integrační meze x od $-\frac{b}{2}$ po $\frac{b}{2}$

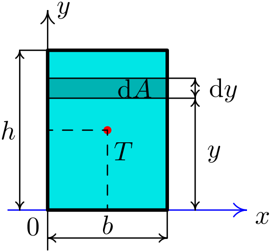
$$I_{y_T} = \int_A x^2\,\mathrm{d}A = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} hx^2\,\mathrm{d}x = h\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2\,\mathrm{d}x = h\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} =$$

$$= \frac{h}{3}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3\right] = \frac{h}{3}\left[\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8}\right] = \frac{h}{3}\,\frac{2b^3}{8} = \frac{1}{12}hb^3$$

Ověření Steinerovy věty

Obdélník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami obdélníka

Moment setrvačnosti vypočteme nejprve podle vzorce.



$\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}y$

diferenciál plochy proužku

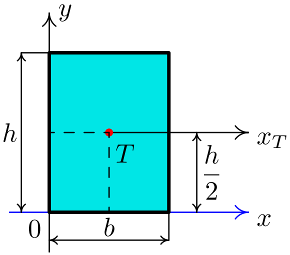
integrační meze y od 0 po h

$$I_x = \int_A y^2\,\mathrm{d}A = \int_0^h by^2\,\mathrm{d}y = b\int_0^h y^2\,\mathrm{d}y = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}bh^3$$

Ověření Steinerovy věty

Obdélník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami obdélníka

Stejný výsledek získáme i výpočtem pomocí Steinerovy věty.



$$I_x = I_{x_T} + c^2 A$$

$$A = bh$$

$$c = \frac{h}{2}$$

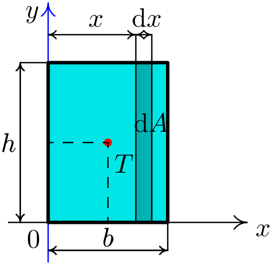
$$I_{x_T} = \frac{1}{12} bh^3$$

$$I_x = I_{x_T} + c^2 A = \frac{1}{12} bh^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{1}{12} bh^3 + \frac{1}{4} bh^3 = \frac{1+3}{12} bh^3 = \frac{1}{3} bh^3$$

Ověření Steinerovy věty

Obdélník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami obdélníka

Výpočet momentu setrvačnosti podle vzorce.



$\mathrm{d}A = h\,\mathrm{d}x$
diferenciál plochy proužku

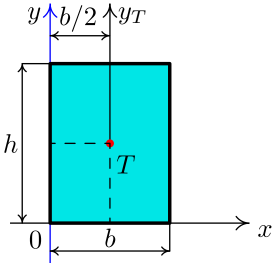
integrační meze x od 0 po b

$$I_y = \int_A x^2\,\mathrm{d}A = \int_0^b hx^2\,\mathrm{d}x = h\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x = h\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{1}{3}hb^3$$

Ověření Steinerovy věty

Obdélník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami obdélníka

Tentýž výsledek lze získat použitím Steinerovy věty.



$$I_y = I_{y_T} + d^2 A$$

$$A = bh$$

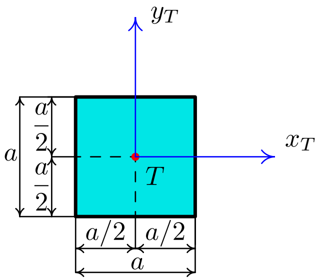
$$d = \frac{b}{2}$$

$$I_{y_T} = \frac{1}{12} hb^3$$

$$I_y = I_{y_T} + d^2 A = \frac{1}{12} hb^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{1}{12} hb^3 + \frac{1}{4} hb^3 = \frac{1+3}{12} hb^3 = \frac{1}{3} hb^3$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Čtverec - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám



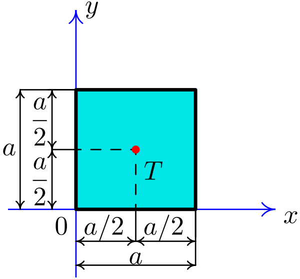
pro čtverec platí
$b = h = a$

$$I_{x_T} = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} a^4$$
$$I_{y_T} = \frac{1}{12} h b^3 = \frac{1}{12} a^4$$

$$\Rightarrow \qquad I_{x_T} = I_{y_T} = \frac{1}{12} a^4$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Čtverec - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami čtverce



pro čtverec platí
$b = h = a$

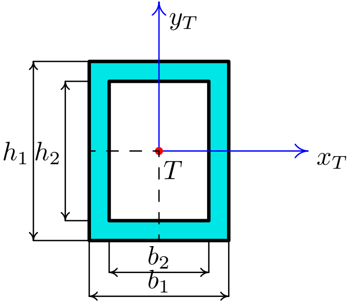
$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}a^4$$
$$I_y = \frac{1}{3}hb^3 = \frac{1}{3}a^4$$

$$\Rightarrow \qquad I_x = I_y = \frac{1}{3}a^4$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Dutý obdélník - momenty setrvačnosti k **těžišťovým osám**

Jde o složený obrazec z vnějšího obdélníku o rozměrech b_1, h_1 a odečítaný vnitřní obdélník o rozměrech b_2, h_2.



momenty setrvačnosti obdélníku

$$I_{x_T} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_{y_T} = \frac{1}{12} h b^3$$

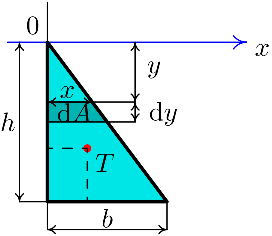
$$I_{x_T} = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 - \frac{1}{12} b_2 h_2^3 = \frac{1}{12}\left(b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3\right)$$

$$I_{y_T} = \frac{1}{12} h_1 b_1^3 - \frac{1}{12} h_2 b_2^3 = \frac{1}{12}\left(h_1 b_1^3 - h_2 b_2^3\right)$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Pravoúhlý trojúhelník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím vrcholem

Vypočtený moment setrvačnosti použijeme dále pro odvození centrálního momentu.



$\mathrm{d}A = x\,\mathrm{d}y$ diferenciál plochy proužku

z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h}y$$

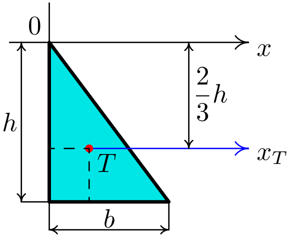
$$\mathrm{d}A = x\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}y\,\mathrm{d}y$$

$$I_x = \int_A y^2\,\mathrm{d}A = \int_0^h \frac{b}{h}y^3\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\int_0^h y^3\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{b}{h}\frac{h^4}{4} = \frac{1}{4}bh^3$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Pravoúhlý trojúhelník - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

K výpočtu použijeme vztah plynoucí ze Steinerovy věty a již vypočtený moment setrvačnosti k ose x jdoucí vrcholem trojúhelníku.



$$I_{x_T} = I_x - c^2 A$$

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$c = \frac{2}{3}h$$

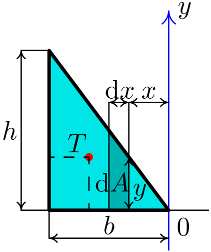
$$I_x = \frac{1}{4}bh^3$$

$$I_{x_T} = I_x - c^2 A = \frac{1}{4}bh^3 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{1}{4}bh^3 - \frac{2}{9}bh^3 = \frac{9-8}{36}bh^3 = \frac{1}{36}bh^3$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Pravoúhlý trojúhelník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím vrcholem

Tento moment setrvačnosti se užije při výpočtu centrálního momentu.



$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$ diferenciál plochy proužku

z podobnosti trojúhelníků plyne

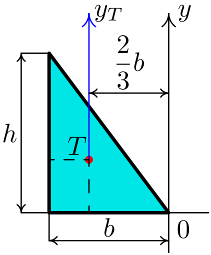
$$\frac{y}{h} = \frac{x}{b} \Rightarrow y = \frac{h}{b}x$$

$$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x = \frac{h}{b}x\,\mathrm{d}x$$

$$I_y = \int_A x^2\,\mathrm{d}A = \int_0^b \frac{h}{b}x^3\,\mathrm{d}x = \frac{h}{b}\int_0^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{h}{b}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^b = \frac{h}{b}\frac{b^4}{4} = \frac{1}{4}hb^3$$

Pravoúhlý trojúhelník - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Použijeme vztah odvozený ze Steinerovy věty a již vypočtený moment setrvačnosti k ose y jdoucí vrcholem trojúhelníku.



$$I_{y_T} = I_y - d^2 A$$

$$A = \frac{1}{2}bh$$

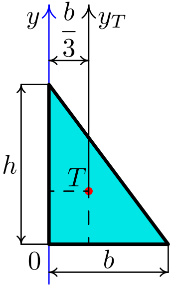
$$d = \frac{2}{3}b$$

$$I_y = \frac{1}{4}hb^3$$

$$I_{y_T} = I_y - d^2 A = \frac{1}{4}hb^3 - \left(\frac{2}{3}b\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{1}{4}hb^3 - \frac{2}{9}hb^3 = \frac{9-8}{36}hb^3 = \frac{1}{36}hb^3$$

Pravoúhlý trojúhelník - momenty setrvačnosti k osám procházejícím stranami trojúhelníku

Moment setrvačnosti pravoúhlého trojúhelníku k ose, která prochází stranou h, budeme potřebovat pro odvození momentu setrvačnosti rovnoramenného trojúhelníku. Moment vypočteme pomocí Steinerovy věty.



$$I_y = I_{y_T} + d^2 A$$

$$A = \frac{1}{2} bh$$

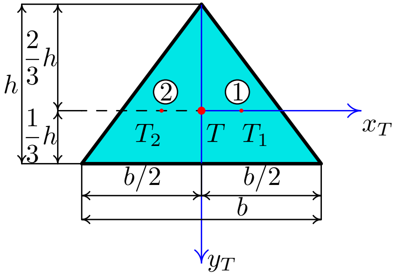
$$d = \frac{1}{3} b$$

$$I_{y_T} = \frac{1}{36} hb^3$$

$$I_y = I_{y_T} + d^2 A = \frac{1}{36} hb^3 + \left(\frac{1}{3} b\right)^2 \frac{1}{2} bh = \frac{1}{36} hb^3 + \frac{1}{18} hb^3 = \frac{1+2}{36} hb^3 = \frac{1}{12} hb^3$$

Rovnoramenný trojúhelník - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Rovnoramenný trojúhelník se skládá ze dvou symetrických pravoúhlých trojúhelníků. Použijeme momenty setrvačnosti pro pravoúhlý trojúhelník, a to k těžišťové ose x_T a k ose procházející společnou stranou těchto trojúhelníků.



pro pravoúhlý trojúhelník platí

$$I_{x_T} = \frac{1}{36} bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} hb^3$$

I_y je moment ke straně h trojúhelníku, jež je výškou rovnoramenného trojúhelníku (osa y je totožná s naší osou y_T)

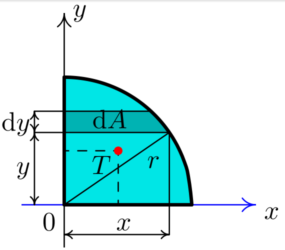
délka spodní strany není b, ale $b/2$

$$I_{x_T} = 2\left(\frac{1}{36}\left(\frac{b}{2}\right)h^3\right) = \frac{1}{36} bh^3$$

$$I_{y_T} = 2\left(\frac{1}{12} h\left(\frac{b}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{48} hb^3$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Čtvrtkruh - momenty setrvačnosti k osám jdoucím "bočními stranami"



$\mathrm{d}A = x\,\mathrm{d}y$ diferenciál plochy proužku

rovnice kružnice o poloměru r, středu $[0,0]$

$x^2 + y^2 = r^2$

$x = \sqrt{r^2 - y^2}$ pro $x \geq 0$

$\mathrm{d}A = x\,\mathrm{d}y = \sqrt{r^2 - y^2}\,\mathrm{d}y$

$$I_x = \int_A y^2\,\mathrm{d}A = \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} y = r\sin t \\ \mathrm{d}y = r\cos t\,\mathrm{d}t \\ (t = \arcsin \frac{y}{r}) \\ y = 0 \Rightarrow t = \arcsin 0 = 0 \\ y = r \Rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 t \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\; r\cos t\,\mathrm{d}t = r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t}\; \cos t\,\mathrm{d}t =$$

Čtvrtkruh - momenty setrvačnosti k osám jdoucím "bočními stranami"

$$= r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \sqrt{1 - \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} 1 = \sin^2 t + \cos^2 t \\ 1 - \sin^2 t = \cos^2 t \end{vmatrix} =$$

$$= r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} 2\sin t \cos t = \sin 2t \\ 4\sin^2 t \cos^2 t = \sin^2 2t \\ \sin^2 t \cos^2 t = \dfrac{1}{4}\sin^2 2t \end{vmatrix} = \frac{1}{4} r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t =$$

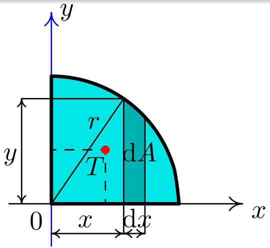
$$\begin{vmatrix} \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos 2t}{2} \\ \sin^2 2t = \dfrac{1 - \cos 4t}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8} r^4 \left[t - \frac{1}{4}\sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{8} r^4 \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{4}\sin 0 \right) \right] = \frac{1}{8} r^4 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{1}{16}\pi r^4$$

$$I_x = \frac{1}{16}\pi r^4$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Čtvrtkruh - momenty setrvačnosti k osám jdoucím "bočními stranami"



$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$ diferenciál plochy proužku

rovnice kružnice o poloměru r, středu $[0,0]$

$x^2 + y^2 = r^2$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ pro $y \geq 0$

$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x = \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$

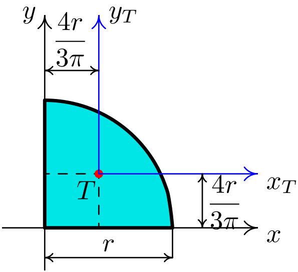
Analogicky jako moment setrvačnosti I_x se vypočte (vyjde stejný určitý integrál)

$$I_y = \int_A x^2\,\mathrm{d}A = \int_0^r x^2 \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = r\sin t \\ \mathrm{d}x = r\cos t\,\mathrm{d}t \\ (t = \arcsin \frac{x}{r}) \\ x = 0 \Rightarrow t = \arcsin 0 = 0 \\ x = r \Rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 t \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; r\cos t\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{1}{16}\pi r^4$$

Čtvrtkruh - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Pro výpočet užijeme vztahy plynoucí ze Steinerovy věty a již odvozené momenty setrvačnosti k osám x a y.



$I_{x_T} = I_x - c^2 A$
$I_{y_T} = I_y - d^2 A$

$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$
momenty k osám x a y

$c = d = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$
plyne ze souřadnic těžiště čtvrtkruhu

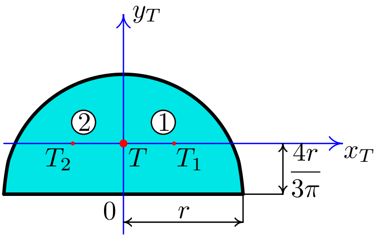
$A = \frac{1}{4}\pi r^2$

$$I_{x_T} = I_{y_T} = I_x - c^2 A = I_y - d^2 A = \frac{1}{16}\pi r^4 - \left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2 \frac{1}{4}\pi r^2 = r^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Půlkruh - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Půlkruh je složený obrazec ze dvou čtvrtkruhů. Použijeme moment setrvačnosti čtvrtkruhu k těžišťové ose x_T a k ose procházející společnou stranou obou čtvrtkruhů (je osou symetrie půlkruhu).



pro čtvrtkruh platí

$$I_{x_T} = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)$$

$$I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$$

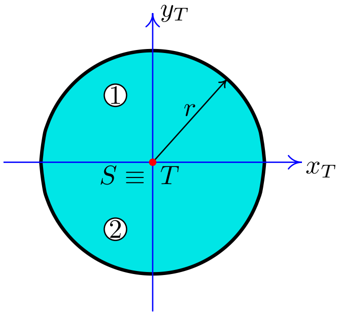
I_y je moment setrvačnosti k ose procházející "boční stranou" čtvrtkruhu (je to osa symetrie půlkruhu a tudíž těžišťová osa y_T)

$$I_{x_T} = 2r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$$

$$I_{y_T} = 2 \frac{1}{16} \pi r^4 = \frac{1}{8} \pi r^4$$

Kruh - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Kruh je složený obrazec ze dvou půlkruhů. Protože je kruh symetrický podle osy x_T i y_T, bude pro momenty setrvačnosti k těžišťovým osám platit $I_{x_T} = I_{y_T}$.



pro půlkruh platí

$$I_{y_T} = \frac{1}{8}\pi r^4$$

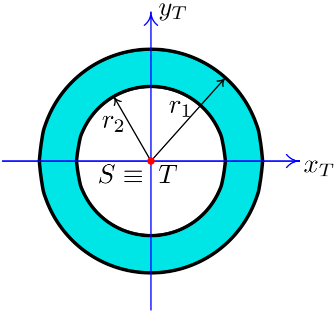
I_{y_T} je moment setrvačnosti k ose symetrie procházející středem S

$$I_{x_T} = I_{y_T} = 2\,\frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{4}\pi r^4$$

Momenty setrvačnosti základních průřezů

Mezikruží - momenty setrvačnosti k těžišťovým osám

Mezikruží je složený obrazec z vnějšího kruhu o poloměru r_1 a odečítaný vnitřní kruh o poloměru r_2.



pro kruh platí

$$I_{x_T} = I_{y_T} = \frac{1}{4}\pi r^4$$

$$I_{x_T} = I_{y_T} = \frac{1}{4}\pi r_1^4 - \frac{1}{4}\pi r_2^4 = \frac{1}{4}\pi\left(r_1^4 - r_2^4\right)$$

Neurčitý integrál - vlastnosti, vzorce, integrační metody

Shrnutí základního matematického aparátu potřebného pro výpočet momentů setrvačnosti průřezů

Vlastnosti neurčitého integrálu

- $\int [f(x) \pm g(x)]\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x \pm \int g(x)\, \mathrm{d}x$
- $\int c f(x)\, \mathrm{d}x = c \int f(x)\, \mathrm{d}x$

Základní vzorce pro integrování

1. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$ $\qquad \int 1 \, dx = x + c$
2. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$
3. $\int e^x \, dx = e^x + c,$ $\qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
4. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$ $\qquad \int \cos x \, dx = \sin x + c$
5. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\mathrm{cotg} x + c,$ $\qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \mathrm{tg} x + c$
6. $\int \frac{1}{A^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{A} \mathrm{arctg} \frac{x}{A} + c,$ $\qquad \int \frac{1}{A^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A+x}{A-x} \right| + c,$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{A} + c,$ $\qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} \, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm B} \right| + c$

Substituční metoda

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ze substituční metody plynou následující vzorce:

Integrace funkce s lineární vnitřní složkou

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$$

Speciální případ zlomku

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+c$$

Metoda per partes

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Určitý integrál - vlastnosti, výpočet

Vlastnosti určitého integrálu

- $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
- $$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aditivita vzhledem k mezím

- $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Výměna mezí určitého integrálu

- $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (a > b)$$
- $$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad (a = b)$$

Newton - Leibnizova formule pro výpočet určitého integrálu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

F je primitivní funkce k f, tedy neurčitý integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$

Určitý integrál - vlastnosti, výpočet

Metoda per partes pro určitý integrál

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Substituční metoda pro určitý integrál

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Literatura

1. Kompan, F., Bartoš, Z., Fabianová, A.: *Technická mechanika.* Bratislava: Príroda, 1990. ISBN 80-07-00269-3.
2. Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky I.* Praha: Prometheus, 2009. ISBN 978-80-7196-180-2.
3. Jarešová, M., Volf, I.: *Integrální počet ve fyzice* [online]. Studijní text pro řešitele FO, Hradec Králové: MAFY, 2008. Dostupné z `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/intpoc.pdf` [cit. 2012-09-05].
4. Krejsa, M.: *Momenty setrvačnosti a deviační momenty* [online]. Výukový materiál předmětu Stavební statika, Fakulta stavební VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009. Dostupné z `http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/ss_tema10.pdf` [cit. 2012-09-05].
5. Vokáč, M.: *Statika 1 - průřezové veličiny* [online]. Výukový materiál předmětu Statika 1, Fakulta architektury ČVUT Praha, 2012. Dostupné z `http://15122.fa.cvut.cz/?download=_/predmet.s1/st1_2.pdf` [cit. 2012-09-05].

Literatura

6. Vokáč, M.: *Tabulka základních geometrických obrazců* [online]. Výukový materiál předmětu Statika 1, Fakulta architektury ČVUT Praha, 2009. Dostupné z `http://15122.fa.cvut.cz/?download=_/predmet.s1/tabprurezu.pdf` [cit. 2012-09-05].

Prezentace byla zpracována v rámci projektu:

Perspektivy krajinného managementu - inovace krajinářských disciplín

reg.č. CZ.1.07/2.2.00/15.0080

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

2007-13

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ