Statické momenty a těžiště průřezů
- použití určitých integrálů v Technické mechanice

Dana Říhová, Pavla Kotásková

Mendelu Brno

Perspektivy krajinného managementu - inovace krajinářských disciplín

reg.č. CZ.1.07/2.2.00/15.0080

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Jakob Steiner
švýcarský matematik - geometr

Plocha průřezu

$$\boxed{A = \int_A \mathrm{d}A}$$

Statické momenty průřezu k ose x a k ose y

$$\boxed{U_x = \int_A y\,\mathrm{d}A, \quad U_y = \int_A x\,\mathrm{d}A}$$

Statický moment k ose, která prochází těžištěm (těžišťové ose), je nulový.

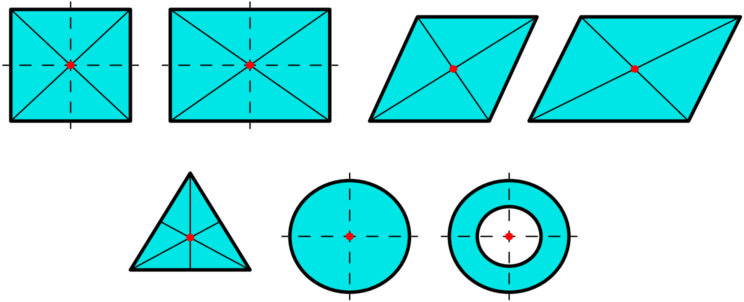
Souřadnice těžiště průřezu

$$\boxed{x_T = \frac{U_y}{A} = \frac{\int_A x\,\mathrm{d}A}{\int_A \mathrm{d}A}, \quad y_T = \frac{U_x}{A} = \frac{\int_A y\,\mathrm{d}A}{\int_A \mathrm{d}A}}$$

Má-li průřez jednu osu symetrie, leží těžiště na této ose symetrie.
Má-li průřez dvě nebo více os symetrie, leží těžiště v průsečíku os symetrie.

Těžiště jednoduchých průřezů

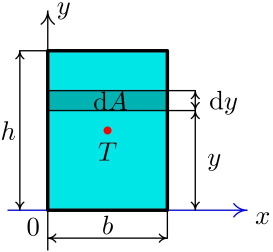
- **Čtverec**, **obdélník**, **kosočtverec**, **kosodélník** - těžiště v průsečíku úhlopříček



- **Kruh** - těžiště ve středu kružnice
- **Trojúhelník** - těžiště v průsečíku spojnic vrcholů se středy protilehlých stran (leží na těžnici v jedné třetině výšky trojúhelníka)

Určení těžiště průřezů pomocí statických momentů

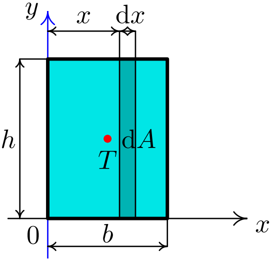
Obdélník - výpočet statických momentů



$$\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}y$$

$$U_x = \int_A y\,\mathrm{d}A = \int_0^h by\,\mathrm{d}y = b\int_0^h y\,\mathrm{d}y =$$

$$= b\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{1}{2}bh^2$$

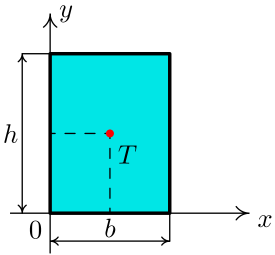


$$\mathrm{d}A = h\,\mathrm{d}x$$

$$U_y = \int_A x\,\mathrm{d}A = \int_0^b hx\,\mathrm{d}x = h\int_0^b x\,\mathrm{d}x =$$

$$= h\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{1}{2}hb^2$$

Obdélník - souřadnice těžiště



- $A = bh$
- $x_T = \dfrac{1}{2}b$
- $y_T = \dfrac{1}{2}h$

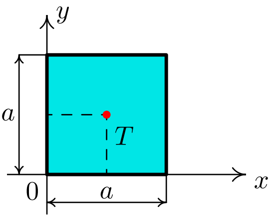
výpočet souřadnic těžiště

$$x_T = \frac{U_y}{A} = \frac{\frac{1}{2}hb^2}{bh} = \frac{1}{2}b$$

$$y_T = \frac{U_x}{A} = \frac{\frac{1}{2}bh^2}{bh} = \frac{1}{2}h$$

Určení těžiště průřezů pomocí statických momentů

Čtverec - statické momenty a souřadnice těžiště



- $A = a^2$
- $x_T = \frac{1}{2}a$
- $y_T = \frac{1}{2}a$

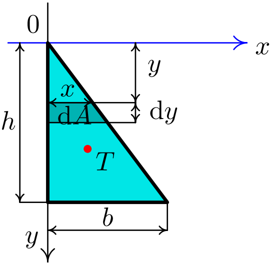
výpočet statických momentů a souřadnic těžiště

pro čtverec platí $b = h = a$

$$U_x = \frac{1}{2}a^3, \quad U_y = \frac{1}{2}a^3,$$

$$x_T = y_T = \frac{\frac{1}{2}a^3}{a^2} = \frac{1}{2}a$$

Pravoúhlý trojúhelník - výpočet statických momentů



$\mathrm{d}A = x\,\mathrm{d}y$ diferenciál plochy proužku

z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h}y$$

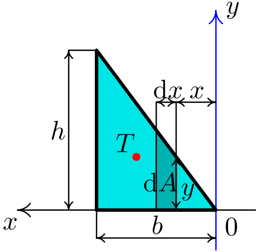
$$\mathrm{d}A = x\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}y\,\mathrm{d}y$$

$$A = \int_A \mathrm{d}A = \int_0^h \frac{b}{h}y\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\int_0^h y\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{b}{h}\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}bh$$

$$U_x = \int_A y\,\mathrm{d}A = \int_0^h \frac{b}{h}y^2\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\int_0^h y^2\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{b}{h}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}bh^2$$

Určení těžiště průřezů pomocí statických momentů

Pravoúhlý trojúhelník - výpočet statických momentů



$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$ diferenciál plochy proužku

z podobnosti trojúhelníků plyne

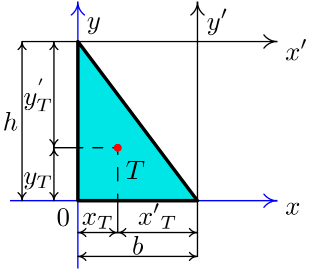
$$\frac{y}{h} = \frac{x}{b} \Rightarrow y = \frac{h}{b}x$$

$$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x = \frac{h}{b}x\,\mathrm{d}x$$

$$U_y = \int_A x\,\mathrm{d}A = \int_0^b \frac{h}{b}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{h}{b}\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{h}{b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{h}{b}\frac{b^3}{3} = \frac{1}{3}b^2h$$

Určení těžiště průřezů pomocí statických momentů

Pravoúhlý trojúhelník - souřadnice těžiště



- $A = \dfrac{1}{2}bh$
- $x_T = \dfrac{1}{3}b$
- $y_T = \dfrac{1}{3}h$

výpočet souřadnic těžiště

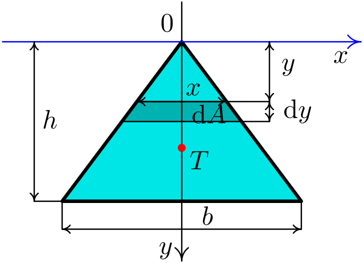
$$x'_T = \frac{U_{y'}}{A} = \frac{\frac{1}{3}b^2h}{\frac{1}{2}bh} = \frac{2}{3}b, \quad y'_T = \frac{U_{x'}}{A} = \frac{\frac{1}{3}bh^2}{\frac{1}{2}bh} = \frac{2}{3}h$$

Statické momenty byly vypočteny k osám x' a y', proto je potřeba souřadnice těžiště přepočítat do souřadnic s osami x a y

$$x_T = b - x'_T = b - \frac{2}{3}b = \frac{1}{3}b, \quad y_T = h - y'_T = h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}h$$

Určení těžiště průřezů pomocí statických momentů

Rovnoramenný trojúhelník - výpočet statických momentů



$\mathrm{d}A = x\,\mathrm{d}y$ diferenciál plochy proužku

z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h}y$$

$$\mathrm{d}A = x\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}y\,\mathrm{d}y$$

Analogicky jako v případě pravoúhlého trojúhelníku se odvodí

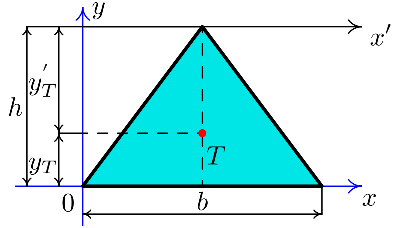
$$A = \int_A \mathrm{d}A = \int_0^h \frac{b}{h}y\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\int_0^h y\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{b}{h}\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}bh$$

$$U_x = \int_A y\,\mathrm{d}A = \int_0^h \frac{b}{h}y^2\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\int_0^h y^2\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{b}{h}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}bh^2$$

Statický moment U_y nepočítáme; vzhledem k symetrii trojúhelníku podle osy y je statický moment U_y nulový a těžiště leží na ose y

Určení těžiště průřezů pomocí statických momentů

Rovnoramenný trojúhelník - souřadnice těžiště



- $A = \frac{1}{2} bh$
- $x_T = \frac{1}{2} b$
- $y_T = \frac{1}{3} h$

výpočet souřadnic těžiště

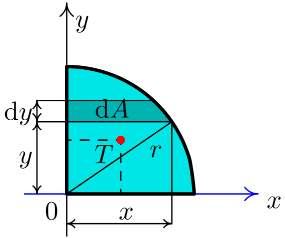
Trojúhelník je symetrický podle osy symetrie, těžiště leží na ní, tedy $x_T = \frac{1}{2} b$

$$y'_T = \frac{U_{x'}}{A} = \frac{\frac{1}{3} bh^2}{\frac{1}{2} bh} = \frac{2}{3} h$$

Statický moment $U_{x'}$ byl vypočten k ose x', souřadnici y_T přepočteme k ose x

$$y_T = h - y'_T = h - \frac{2}{3} h = \frac{1}{3} h$$

Čtvrtkruh - výpočet statických momentů



$\mathrm{d}A = x\,\mathrm{d}y$ diferenciál plochy proužku

rovnice kružnice o poloměru r, středu $[0,0]$

$x^2 + y^2 = r^2$

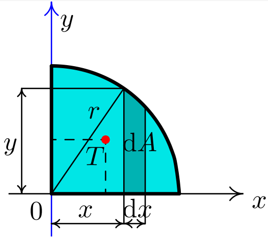
$x = \sqrt{r^2 - y^2}$ pro $x \geq 0$

$\mathrm{d}A = x\,\mathrm{d}y = \sqrt{r^2 - y^2}\,\mathrm{d}y$

$$U_x = \int_A y\,\mathrm{d}A = \int_0^r y\sqrt{r^2 - y^2}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} t = r^2 - y^2 \\ \mathrm{d}t = -2y\,\mathrm{d}y \\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = y\,\mathrm{d}y \\ y = 0 \Rightarrow t = r^2 \\ y = r \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int_{r^2}^0 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= +\frac{1}{2}\int_0^{r^2} t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{r^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_0^{r^2} = \frac{1}{3}\sqrt{r^6} = \frac{1}{3}r^3$$

Čtvrtkruh - výpočet statických momentů



$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$ diferenciál plochy proužku

rovnice kružnice o poloměru r, středu $[0,0]$

$x^2 + y^2 = r^2$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ pro $y \geq 0$

$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x = \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$

Analogicky jako statický moment U_x se odvodí

$$U_y = \int_A x\,\mathrm{d}A = \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = r^2 - x^2 \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x \\ x = 0 \Rightarrow t = r^2 \\ x = r \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int_{r^2}^0 \sqrt{t}\ \mathrm{d}t =$$

$$= +\frac{1}{2}\int_0^{r^2} t^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{r^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_0^{r^2} = \frac{1}{3}\sqrt{r^6} = \frac{1}{3}r^3$$

Čtvrtkruh - výpočet obsahu

Použijeme odvozeného vztahu $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x = \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$

$$A = \int_A \mathrm{d}A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = r\sin t \\ \mathrm{d}x = r\cos t\,\mathrm{d}t \\ (t = \arcsin\frac{x}{r}) \\ x = 0 \Rightarrow t = \arcsin 0 = 0 \\ x = r \Rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

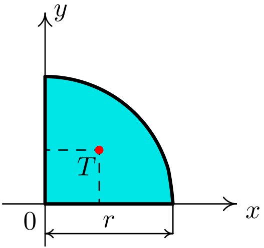
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; r\cos t\,\mathrm{d}t = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\;\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1 = \sin^2 t + \cos^2 t \\ 1 - \sin^2 t = \cos^2 t \end{array} \right| = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \left| \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \right| =$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}r^2 \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0 \right) = \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{1}{4}\pi r^2$$

Čtvrtkruh - souřadnice těžiště



- $A = \frac{1}{4}\pi r^2$
- $x_T = \frac{4r}{3\pi}$
- $y_T = \frac{4r}{3\pi}$

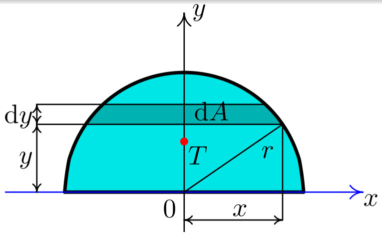
výpočet souřadnic těžiště

$$x_T = \frac{U_y}{A} = \frac{\frac{1}{3}r^3}{\frac{1}{4}\pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$y_T = \frac{U_x}{A} = \frac{\frac{1}{3}r^3}{\frac{1}{4}\pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}$$

Určení těžiště průřezů pomocí statických momentů

Půlkruh - výpočet statických momentů



$\mathrm{d}A = 2x\,\mathrm{d}y$ diferenciál plochy proužku

rovnice kružnice o poloměru r, středu $[0,0]$
$x^2 + y^2 = r^2$

$x = \sqrt{r^2 - y^2}$ pro $x \geq 0$

$\mathrm{d}A = 2x\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{r^2 - y^2}\,\mathrm{d}y$

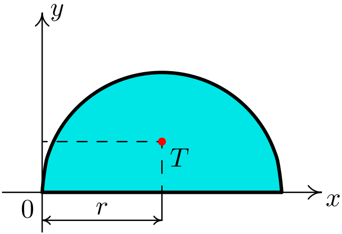
Analogicky jako v případě čtvrtkruhu odvodíme

$$U_x = \int_A y\,\mathrm{d}A = 2\int_0^r y\sqrt{r^2 - y^2}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} t = r^2 - y^2 \\ \mathrm{d}t = -2y\,\mathrm{d}y \\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = y\,\mathrm{d}y \\ y = 0 \Rightarrow t = r^2 \\ y = r \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = -\int_{r^2}^0 \sqrt{t}\;\mathrm{d}t =$$

$$= +\int_0^{r^2} t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{r^2} = \frac{2}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_0^{r^2} = \frac{2}{3}\sqrt{r^6} = \frac{2}{3}r^3$$

Určení těžiště průřezů pomocí statických momentů

Půlkruh - souřadnice těžiště



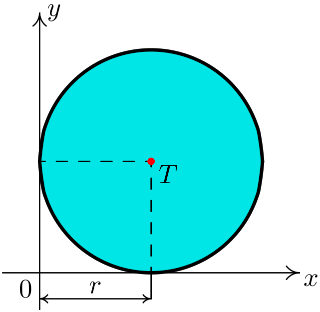
- $A = \frac{1}{2}\pi r^2$
- $x_T = r$
- $y_T = \frac{4r}{3\pi}$

výpočet souřadnic těžiště

Půlkruh je symetrický podle osy symetrie, těžiště leží na ní, tedy $x_T = r$

$$y_T = \frac{U_x}{A} = \frac{\frac{2}{3}r^3}{\frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}$$

Kruh - souřadnice těžiště



- $A = \pi r^2$
- $x_T = r$
- $y_T = r$

výpočet souřadnic těžiště

Osy symetrie kruhu procházejí jeho středem, těžiště leží ve středu kružnice

$$x_T = y_T = r$$

Shrnutí základního matematického aparátu potřebného pro výpočet statických momentů a těžišť průřezů

Vlastnosti neurčitého integrálu

- $\int [f(x) \pm g(x)]\ \mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int c f(x)\,\mathrm{d}x = c \int f(x)\,\mathrm{d}x$

Základní vzorce pro integrování

1. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$ $\qquad \int 1 \, dx = x + c$
2. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$
3. $\int e^x \, dx = e^x + c,$ $\qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
4. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$ $\qquad \int \cos x \, dx = \sin x + c$
5. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\mathrm{cotg} x + c,$ $\qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \mathrm{tg} x + c$
6. $\int \frac{1}{A^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{A} \mathrm{arctg} \frac{x}{A} + c,$ $\qquad \int \frac{1}{A^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A+x}{A-x} \right| + c,$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{A} + c,$ $\qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} \, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm B} \right| + c$

Substituční metoda

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} t=\varphi(x) \\ \mathrm{d}t=\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ze substituční metody plynou následující vzorce:

Integrace funkce s lineární vnitřní složkou

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$$

Speciální případ zlomku

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+c$$

Metoda per partes

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Určitý integrál - vlastnosti, výpočet

Vlastnosti určitého integrálu

- $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b c f(x)\,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Aditivita vzhledem k mezím

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Výměna mezí určitého integrálu

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (a > b)$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad (a = b)$

Určitý integrál - vlastnosti, výpočet

Newton - Leibnizova formule pro výpočet určitého integrálu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

F je primitivní funkce k f, tedy neurčitý integrál $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$

Určitý integrál - vlastnosti, výpočet

Metoda per partes pro určitý integrál

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Substituční metoda pro určitý integrál

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Literatura

1. Kompan, F., Bartoš, Z., Fabianová, A.: *Technická mechanika.* Bratislava: Príroda, 1990. ISBN 80-07-00269-3.
2. Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky I.* Praha: Prometheus, 2009. ISBN 978-80-7196-180-2.
3. Jarešová, M., Volf, I.: *Integrální počet ve fyzice* [online]. Studijní text pro řešitele FO, Hradec Králové: MAFY, 2008. Dostupné z `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/intpoc.pdf` [cit. 2012-08-30].
4. Krejsa, M.: *Těžiště* [online]. Výukový materiál předmětu Stavební statika, Fakulta stavební VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009. Dostupné z `http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/ss_tema09.pdf` [cit. 2012-08-30].
5. Vokáč, M.: *Statika 1 - průřezové veličiny* [online]. Výukový materiál předmětu Statika 1, Fakulta architektury ČVUT Praha, 2012. Dostupné z `http://15122.fa.cvut.cz/?download=_/predmet.s1/st1_2.pdf` [cit. 2012-08-30].

Literatura

6. Vokáč, M.: *Tabulka základních geometrických obrazců* [online]. Výukový materiál předmětu Statika 1, Fakulta architektury ČVUT Praha, 2009. Dostupné z `http://15122.fa.cvut.cz/?download=_/predmet.s1/tabprurezu.pdf` [cit. 2012-08-30].

Prezentace byla zpracována v rámci projektu:

Perspektivy krajinného managementu - inovace krajinářských disciplín

reg.č. CZ.1.07/2.2.00/15.0080

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ