# Trigonometrie - Sinová a kosinová věta
## a jejich užití v Technické mechanice

Dana Říhová, Pavla Kotásková

Mendelu Brno

**Perspektivy krajinného managementu - inovace krajinářských disciplín**

reg.č. CZ.1.07/2.2.00/15.0080

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Obsah



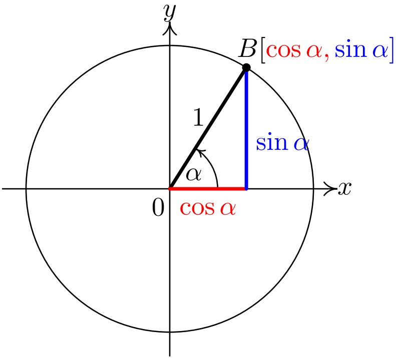
Leonard Euler
zakladatel moderní trigonometrie

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Goniometrické funkce

1. Definice goniometrických funkcí pomocí **jednotkové kružnice** (poloměr $r = 1$) se středem v počátku $O$ soustavy souřadnic




bod $B[x, y]$ má souřadnice
$x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ pro $\cos\alpha \neq 0$

tj. $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$,

$\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$ pro $\sin\alpha \neq 0$

tj. $\alpha \neq k\pi$

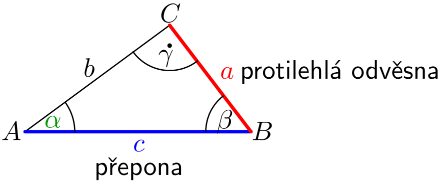
- $\alpha$ je orientovaný úhel, jehož vrchol je ve středu kružnice a počáteční rameno splývá s kladnou částí osy $x$,
- $B$ je průsečík jednotkové kružnice s koncovým ramenem orientovaného úhlu $\alpha$

# Goniometrické funkce

2. Definice funkcí sinus a kosinus pomocí **pravoúhlého trojúhelníka** $ABC$ s pravým úhlem $\gamma$ při vrcholu $C$

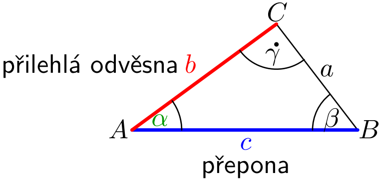
- **Sinus** úhlu $\alpha$ je podíl délky odvěsny protilehlé tomuto úhlu a délky přepony

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$




- **Kosinus** úhlu $\alpha$ je podíl délky odvěsny přilehlé tomuto úhlu a délky přepony

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$$



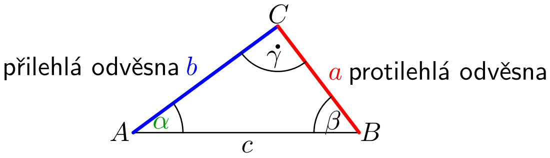
# Goniometrické funkce

2. Definice funkcí tangens a kotangens pomocí **pravoúhlého trojúhelníka** $ABC$ s pravým úhlem $\gamma$ při vrcholu $C$

- **Tangens** úhlu $\alpha$ je podíl délky odvěsny protilehlé tomuto úhlu a délky odvěsny přilehlé

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}}$$

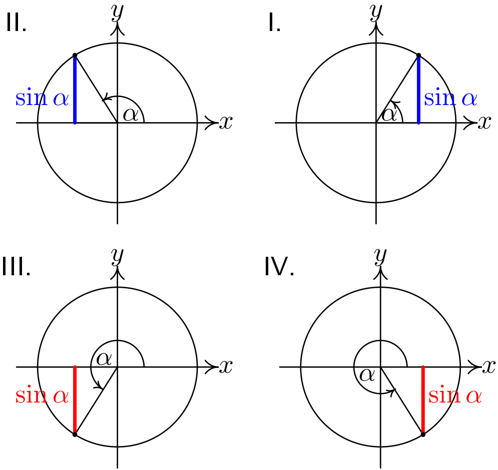
$$\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}}$$




- **Kotangens** úhlu $\alpha$ je podíl délky odvěsny přilehlé tomuto úhlu a délky odvěsny protilehlé

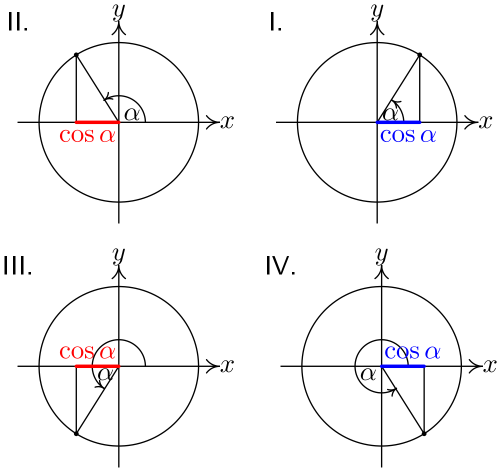
# Goniometrické funkce

## Znázornění funkce **sinus** v jednotlivých kvadrantech




- funkce sinus je záporná pro úhly $\alpha$ z intervalu $(\pi, 2\pi)$, tedy $(180^\circ, 360^\circ)$

## Znázornění funkce **kosinus** v jednotlivých kvadrantech




- funkce kosinus je záporná pro úhly $\alpha$ z intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, tedy $(90^\circ, 270^\circ)$

# Goniometrické funkce

**Znaménka** goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech

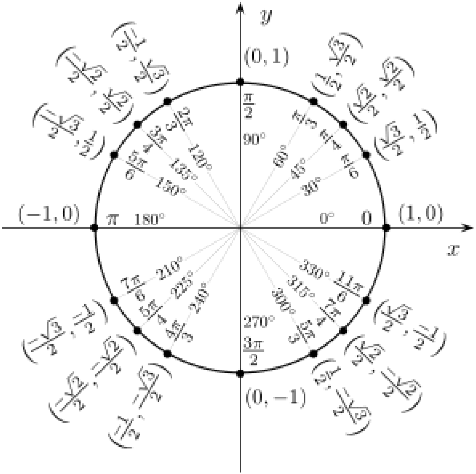
| Funkce | I. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ | II. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ | III. $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ | IV. $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $\cos\alpha$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $\operatorname{cotg}\alpha$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

Pro převod úhlu do obloukové míry platí

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{180^\circ}\,\alpha^\circ,}$$

kde $\alpha$ je velikost úhlu v obloukové míře a $\alpha^\circ$ velikost úhlu ve stupních.

**Znázornění hodnot funkcí sinus a kosinus na jednotkové kružnici**




$$x = \cos\alpha$$

$$y = \sin\alpha$$

# Hodnoty goniometrických funkcí

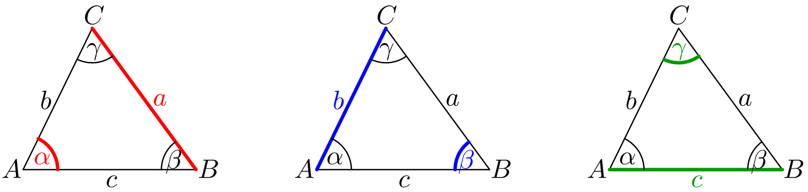
**Hodnoty** goniometrických funkcí ve vybraných úhlech

| Stupně | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Radiány | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |
| $\operatorname{cotg}\alpha$ | - | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | - |

## Sinová věta

Pro každý trojúhelník $ABC$, jehož vnitřní úhly mají velikosti $\alpha, \beta, \gamma$ a strany délky $a, b, c$, platí

$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}}$$




**Poměr délek stran** a **hodnot sinů jim protilehlých úhlů** je v trojúhelníku **konstantní**.

# Sinová věta

## Poznámka

Sinovou větu můžeme také vyjádřit ve tvaru

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}}$$

**Poměr délek dvou stran** trojúhelníku se rovná **poměru sinů protilehlých úhlů**.

# Sinová věta

Sinová věta se používá v těchto případech

1. Známe dva úhly trojúhelníku a délku jedné strany, chceme zjistit velikosti zbývajících stran

## Příklad (1)

V trojúhelníku $ABC$ určete velikosti zbývajících stran a úhlu, jestliže $\alpha = 20^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, $c = 6$.

Řešení:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 20^\circ - 120^\circ = 40^\circ$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad a = c \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 6 \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 120^\circ} \doteq 2{,}37$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 6 \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 120^\circ} \doteq 4{,}44$$

# Sinová věta

2. Známe dvě strany trojúhelníku a úhel proti některé z nich, chceme zjistit zbývající úhly (úloha má jediné řešení, je-li dán úhel proti větší straně)

## Příklad (2)

V trojúhelníku $ABC$ určete velikosti všech úhlů a zbývající strany, jestliže $b = 12{,}5$, $c = 18$, $\gamma = 85°30'$.

Řešení:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \sin\gamma \cdot \frac{b}{c} = \sin 85°30' \cdot \frac{12{,}5}{18} = 0{,}6923$$

$$\beta = \arcsin 0{,}6923 = 43°49'$$

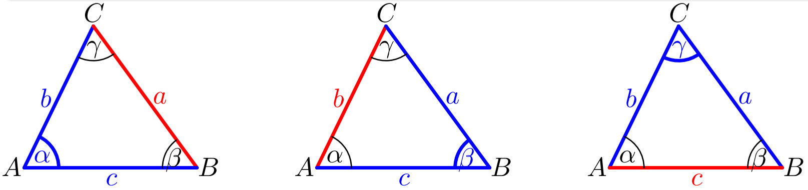
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 43°49' - 85°30' = 50°41'$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 12{,}5 \cdot \frac{\sin 50°41'}{\sin 43°49'} \doteq 14$$

## Kosinová věta

Pro každý trojúhelník $ABC$ se stranami o délkách $a, b, c$ a vnitřními úhly $\alpha, \beta, \gamma$ proti těmto stranám, platí

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \end{aligned}}$$




Čtverec délky strany trojúhelníku je roven součtu čtverců délek zbývajících stran zmenšenému o dvojnásobek součinu délek těchto stran a kosinu úhlu jimi **sevřeného**.

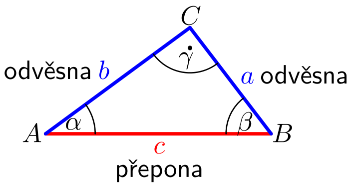
# Kosinová věta

## Poznámka

Pythagorova věta

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

je speciálním případem kosinové věty platné pro pravoúhlý trojúhelník.




V trojúhelníku s pravým úhlem $\gamma = 90^\circ$ dostáváme $\cos\gamma = \cos 90^\circ = 0$ a kosinová věta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

se redukuje na Pythagorovu

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Kosinová věta se používá v těchto případech

1. Známe délky dvou stran trojúhelníku a úhel, který svírají, chceme zjistit délku zbývající strany (a odtud i velikosti zbývajících úhlů)

## Příklad (1)

V trojúhelníku $ABC$ určete délku strany $c$, jestliže $a = 4$, $b = 1$, $\gamma = 20^\circ$.

Řešení:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad c^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos 20^\circ \doteq 9{,}4825$$

$$c = \sqrt{9{,}4825} \doteq 3{,}08$$

# Kosinová věta

2. Známe délky všech tří stran trojúhelníku, chceme zjistit vnitřní úhly

## Příklad (2)

V trojúhelníku $ABC$ určete velikosti vnitřních úhlů, jestliže $a = 6$, $b = 11$, $c = 7$.

Řešení:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{11^2 + 7^2 - 6^2}{2.11.7} \doteq 0{,}8701$$

$$\alpha = \arccos 0{,}8701 \doteq 29°31'$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6^2 + 7^2 - 11^2}{2.6.7} \doteq -0{,}4286$$

$$\beta = \arccos(-0{,}4286) \doteq 115°22'$$

(Velikost úhlu $\beta$ je výhodnější počítat pomocí sinové věty.)

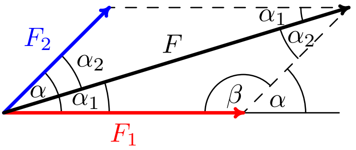
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 29°31' - 115°22' = 35°7'$$

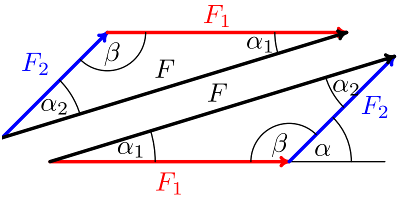
# Užití v Technické mechanice při skládání a rozkladu sil

## Skládání dvou sil působících v jednom bodě

Grafické řešení:

pomocí rovnoběžníku sil




Početní řešení:

Za použití kosinové věty se určí velikost výslednice $F$

$$\boxed{F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cdot \cos\beta}$$

Použijeme-li $\cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha)$, součtový vzorec pro funkci kosinus $\cos(\gamma - \delta) = \cos\gamma \cdot \cos\delta + \sin\gamma \cdot \sin\delta$ a vztahy $\cos 180^\circ = -1$, $\sin 180^\circ = 0$, dostaneme $\cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha) = \cos 180^\circ \cdot \cos\alpha + \sin 180^\circ \cdot \sin\alpha =$
$= (-1) \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha = -\cos\alpha$. Platí tedy $\cos\beta = -\cos\alpha$.

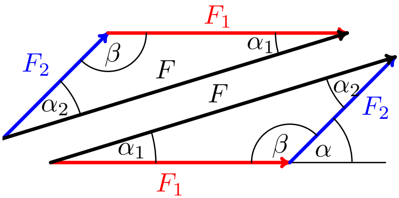
# Užití v Technické mechanice při skládání a rozkladu sil

Nahrazením $\cos\beta = -\cos\alpha$ se potom výslednice $F$ vypočte ze vzorce

$$\boxed{F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos\alpha}}$$

Odklon výslednice $F$ od osy $x$ (úhel $\alpha_1$) se určí z vyznačených trojúhelníků pomocí sinové věty

$$\frac{F_2}{F} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta}$$



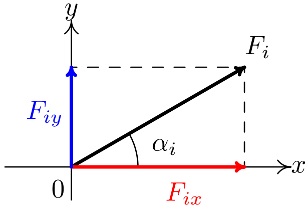

a odtud

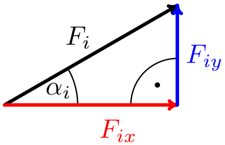
$$\sin\alpha_1 = \frac{F_2}{F}\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{F_2}{F}\sin\beta\right)}$$

# Užití v Technické mechanice při skládání a rozkladu sil

## Rozklad síly na vodorovnou a svislou složku

Síla $F_i$ působící v bodě $O$ je odkloněná od vodorovné osy o úhel $\alpha_i$. Bodem $O$ se proloží pravoúhlá souřadnicová soustava (osy $x$ a $y$) a určovací úsek síly $F_i$ se promítne do os $x$ a $y$. Tím se stanoví vodorovná složka $F_{ix}$ a svislá složka $F_{iy}$.



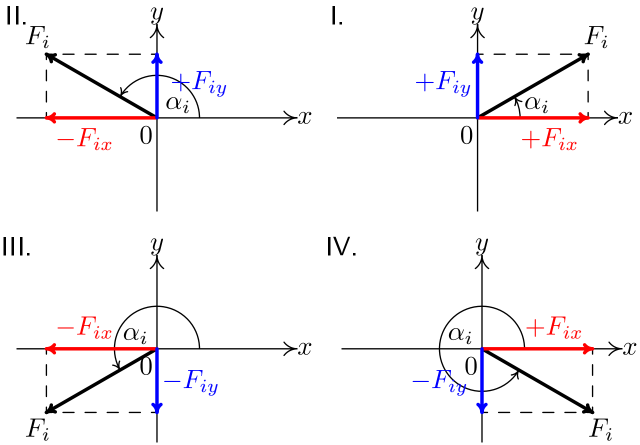

V pravoúhlém trojúhelníku platí

$$\cos\alpha_i = \frac{F_{ix}}{F_i}, \qquad \sin\alpha_i = \frac{F_{iy}}{F_i}.$$

Početně se pak velikost jednotlivých složek určí ze vztahů

$$\boxed{F_{ix} = F_i\cos\alpha_i, \qquad F_{iy} = F_i\sin\alpha_i}$$

**Orientace výslednice a znaménka složek sil** v jednotlivých kvadrantech



# Literatura


1. Kompan, F., Bartoš, Z., Fabianová, A.: *Technická mechanika.* Bratislava: Príroda, 1990. ISBN 80-07-00269-3.
2. Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.
3. Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky I.* Praha: Prometheus, 2009. ISBN 978-80-7196-180-2.
4. Delventhal, K. M., Kissner, A., Kulick, M.: *Kompendium matematiky.* Praha: Universum, 2008. ISBN 80-242-2101-2.
5. Motyčková, M.: *Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole* [online]. MFF UK Praha, Diplomová práce, 2006. Dostupné z `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~robova/stranky/motyckova/Stranky_s_aplety/index.html` [cit. 2012-03-27].
6. *Wikipedie* [online]. Dostupné z `http://cs.wikipedia.org/wiki/Goniometricka_funkce` [cit. 2012-03-27].

Prezentace byla zpracována v rámci projektu:

# Perspektivy krajinného managementu - inovace krajinářských disciplín

reg.č. CZ.1.07/2.2.00/15.0080

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ